Πόρισμα

Αν $f: X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\nu: \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ με $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ (το ν λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ) τότε

2) V μέτρο

3) αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)=0 \Rightarrow V(A)=0$ (V απόλυτα συνεχές ως προς μ) $V \ll \mu$

3) αν $g: X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη με $\int g\, dV = \int f \cdot g\, d\mu$

Απόδειξη

i) Έστω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένη ανά δύο ακολουθία στο $\mathcal{A}$

με $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

τότε $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \Rightarrow f\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n} \xRightarrow{\text{Beppo-Levi}}$

$$\Rightarrow \int f\chi_A\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{A_n}\, d\mu$$

$$V(A) = \sum_{n=1}^{\infty} V(A_n)$$

Επίσης, $V(\emptyset)=0$

Άρα, όπως το V είναι μέτρο

ii) Έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη πρόταση

iii) α. Αν $g = \chi_A$, $A \in \mathcal{A}$

$$\int g\, dv = \int \chi_A\, dv = V(A) = \int_A f\, d\mu = \int f\chi_A\, d\mu = \int f \cdot g\, d\mu$$

α΄. Αν g απλή $\Rightarrow g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \geq 0$, $\forall i$

αλλά από την α) έχουμε δείξει ότι

$$\int \chi_{A_i}\, dv = \int \chi_{A_i} f\, d\mu \;\; \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i}\, dV = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i} f\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}\, dv = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} f\, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int g\, dv = \int f \cdot g\, d\mu$$

α΄΄. Γενική περίπτωση: $g: X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη

Τότε για κάθε g τέτοια, $\exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$

από θετικές & απλές: $g = \lim s_n \Leftrightarrow g f = \lim_n s_n f$

Από το α΄ $\int s_n\, dv = \int s_n f\, d\mu$, $\forall n$ και επειτα αν $n \to \infty$ από Θ.Μ.Σ έπεται

$$\lim \int s_n \, d\nu = \lim \int s_n f \, d\mu \iff \int g \, d\nu = \int g f \, d\mu$$

Σχόλιο

Αν ν, μ μέτρα σ-πεπερ. $\nu \ll \mu \Rightarrow \nu(A) = \int_A f \, d\mu$

Το Θεώρημα (Radon-Nikodym)

Ορισμός $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χμ

Μία ιδιότητα p που αφορά σημεία του X λέμε ότι ισχύει μ-σχεδόν παντού αν το σύνολο $\{x \in X : \text{το } x \text{ δεν έχει την ιδιότητα } p\}$ είναι μ-μηδενικό

Πχ

$f, g : X \to [-\infty, +\infty]$

$f = g$ μ-σ.π (ή $f(x) = g(x)$ μ σχεδόν παντού $\forall x \in X$)

Άρα, $[f \neq g]$ μ-μηδενικό

$f \leq g$ μ-σπ (ή $f(x) \leq g(x)$ μ σχεδόν παντού)

Άρα $[f > g]$ μ-μηδενικό ... κλπ

Παρατήρηση

$\chi_A = \chi_B$ μ-σπ $\iff$ $A \triangle B$ να είναι μ-μηδενικό

Πρόταση

i) Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μ-μετρήσιμη τότε κάθε συνάρτηση $g : X \to [-\infty, +\infty]$ με $f = g$ μ-σπ είναι μ-μετρήσιμη

ii) Αν $f : X \to [-\infty, +\infty]$ μ-μετρήσιμη τότε $\exists g : X \to [-\infty, +\infty]$ μ-μετρήσιμη ώστε $f = g$ μ-σπ

Συνέπεια: Κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση είναι σπ ίση με μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση και επίσης ισχύει το ίδιο και για μιγαδικές συναρτήσεις

Αποδειξη (Προτασης)

i) $A := [f \neq g]$

Τοτε A είναι μ-μηδενικο

$\forall \beta \in \mathbb{R}: \quad [g \leq \beta] = ([g \leq \beta] \setminus A) \cup ([g \leq \beta] \cap A) =$

$$= (\underbrace{\underbrace{[f \leq \beta]}_{\in \mathcal{A}_\mu} \setminus \underbrace{A}_{\in \mathcal{A}_\mu}}_{\in \mathcal{A}_\mu}) \cup (\underbrace{[g \leq \beta] \cap A}_{\mu\text{-μηδενικο} \Rightarrow \in \mathcal{A}_\mu}) \in \mathcal{A}_\mu$$

Αρα g μ-μετρήσιμη

ii) $\mathbb{Q} = \{q_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$

$\forall \nu \in \mathbb{N}: \quad [f \leq q_\nu] \in \mathcal{A}_\mu \Rightarrow \exists E_n \in \mathcal{A}$ και N_n να είναι μ-μηδενικο και $E_n \cap N_n = \emptyset$ ωστε

$[f \leq q_n] = E_n \cup N_n$

Οριζουμε $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$

Το N είναι μ-μηδενικο $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{A}, \ N \subset B : \mu(B) = 0$

Θετουμε $g = f \chi_{X \setminus B}$

$[f \neq g] \subset B \rightarrow [f \neq g]$ μ-μηδενικο και άρα $f = g$ σπ.

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad [g \leq q_n] = ([g \leq q_n] \setminus B) \cup ([g \leq q_n] \cap B) =$

$= ([f \leq q_n] \setminus B) \cup ([g \leq q_n] \cap B)$ (1)

Αλλα $[f \leq q_n] \setminus B = (E_n \cup N_n) \setminus B = E_n \setminus B$ (2)

Αρα απο την (2) → (1)

$[g \leq q_n] = (E_n \setminus B) \cup ([g \leq q_n] \cap B)$ (3)

Αλλα, $[g \leq q_n] \cap B = \begin{cases} \emptyset, & q_n < 0 \\ B, & q_n \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{A}$ (4)

Αρα απο την (3) → (4)

$[g \leq q_n] \in \mathcal{A}$

Ομως, $[g < \beta] = \bigcup_{\{n \in \mathbb{N} : q_n < \lambda\}}^{\infty} [g \leq q_n] \in \mathcal{A}$

Αρα η g είναι $\mathcal{A}$ μετρήσιμη

Πρόταση

Ας είναι $f, g : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες

i) Αν $f = g$ μ-σπ τότε $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$

ii) $f = 0$ μ-σπ $\Leftrightarrow \int f\, d\mu = 0$

Απόδειξη

i) $A := [f \neq g] \in \mathcal{A}$ (αφού f, g μετρήσιμες)

και επίσης $\mu(A) = 0$ (αφού $f = g$ μ-σπ)

Η συνολοσυνάρτηση $V : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ και

$V(A) = \int_A f\, d\mu$ είναι μέτρο και $V(X) = \cancel{V(A)} + V(X \setminus A)$

$$\Rightarrow \int f\, d\mu = \cancel{\int_A f\, d\mu}^{\,0} + \int_{X\setminus A} f\, d\mu = \int_{X \setminus A} f\, d\mu$$

όμοιως $\int g\, d\mu = \int_{X\setminus A} g\, d\mu$

Άρα αφού $f \cdot \chi_{X\setminus A} = g\, \chi_{X \setminus A} \Rightarrow \int f\, \chi_{X\setminus A}\, d\mu = \int g \cdot \chi_{X\setminus A}\, d\mu$

$$\Rightarrow \int_{X\setminus A} f\, d\mu = \int_{X \setminus A} g\, d\mu$$

ii) $(\Rightarrow)$ Αν $f = 0$ μ-σπ $\Rightarrow \int f\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0$

$(\Leftarrow)$ Αν $\int f\, d\mu = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $A_n = [f \geq \frac{1}{n}]$

και συνεπώς $0 = \int f\, d\mu \geq \int f\, \chi_{A_n}\, d\mu \geq \int \frac{1}{n}\, \chi_{A_n}\, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$

Άρα, $\mu(A_n) = 0$, $\forall n$

Όμως, $[f > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Άρα,

$$\mu([f \neq 0]) = \mu([f > 0]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$$

Άρα, $f = 0$ μ-σπ.

Ολοκληρώσιμες Συναρτήσεις

Ορισμός Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f: X \to \mathbb{C}$ λέγεται Lebesgue ολοκληρώσιμη αν ισχύει (ως προς μ).

$$\int |f|\, d\mu < +\infty$$

Παρατηρούμε πως $|f| \geq 0$ και μετρήσιμη άρα $\int |f| d\mu$ είναι καλά ορισμένο

Αν $f = u + iv$ με $u = \mathrm{Re} f$ & $v = \mathrm{Im} f$
Τότε $f = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)$ και σε περίπτωση που είναι ολοκληρώσιμη ορίζουμε $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\int_A f d\mu = \int_A u^+ d\mu - \int_A u^- d\mu + i\int_A v^+ d\mu - i\int v^- d\mu .$$

Για $A = X$ γράφουμε $\int_A f d\mu = \int f d\mu$

Παρατηρούμε: ότι οι u^+, u^-, v^+, v^- θετ. μετρήσιμες και ισχύει ότι $0 \leq u^+, u^-, v^+, v^- \leq |f|$
και εφόσον $\int |f| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_A u^+, u^-, v^+, v^- d\mu$ είναι πραγματικοί αριθμοί (πεπερασμένα)
Έτσι $\int_A f d\mu$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός

Αν τώρα $f: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη μπορεί να θεωρηθεί ως μιγαδική ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) με $u = f$ & $v = 0$
Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι f ολοκληρώσιμη ανν $\int |f| d\mu < +\infty$ και σε τουτη την περίπτωση $\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$ και θα 'ναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι, αν $f: X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη με $f = u + iv$ τότε είναι $\int_A f d\mu = \int_A u\, d\mu + i\int_A v\, d\mu$

Συμβολισμός: $\mathcal{L}^1(\mu)$: χώρος ολοκληρώσιμων συναρτήσεων
(αν $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ τότε αντίστοιχα των πραγματικών)

Έτσι, αν $f: X \to [-\infty, +\infty]$ και $A \in \mathcal{A}$ με f μετρήσιμη τότε ορίζουμε:

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_A f^+ d\mu \quad \text{ή} \quad \int_A f^- d\mu < +\infty .$$

Έτσι ώστε $\int_A f \, d\mu = -\infty$ ή $\int_A f \, d\mu = +\infty$

Άρα, $\int_A f \, d\mu \in \tilde{\mathbb{R}}$

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τότε

i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και

ii) $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f + \beta \int g$

Απόδ.

i) $\alpha f + \beta g$ είναι μετρήσιμη (αφού οι f, g μετρήσιμες)
και $\int |\alpha f + \beta g| \, d\mu \leq \int |\alpha f| + |\beta g| \, d\mu = |\alpha| \int f \, d\mu + |\beta| \int g \, d\mu$
Άρα, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

ii) Αρκεί νδο $\int (f+g) d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ και
$\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

• Για πραγματικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Ορίζουμε $h = f + g = h^+ - h^- = (f+g)^+ - (f+g)^- \Rightarrow$

$\Rightarrow h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \Rightarrow$

θετικές
$\Rightarrow \int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int h^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$

πεπερασ.
$\Rightarrow \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$

$\Rightarrow \int h = f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

Για το άλλο παίρνω τις εξής περιπτώσεις
1) αν $\alpha \geq 0$ και 2) $\alpha < 0$

Τότε για την (1).

$(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ & $(\alpha f)^- = \alpha f^-$
τότε $\int (\alpha f)^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu$ & $\int (\alpha f^-) d\mu = \alpha \int f^- d\mu$
Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνω το ζητούμενο.

Για την (2)
$(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ & $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$
τότε $\int (\alpha f)^+ d\mu = -\alpha \int f^- d\mu$ και επίσης
$\int (\alpha f)^- d\mu = -\alpha \int f^+ d\mu$.
Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο

Για μιγαδικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
Ας είναι $f = u + iv$ και $g = w + iz$, τότε
$f + g = (u+w) + i(v+z)$

$\int (f+g) d\mu = \int (u+w) d\mu + i \int (v+z) d\mu \overset{\text{απλή περίπτ.}}{=}$

$= \int u \, d\mu + \int w \, d\mu + i \int v \, d\mu + i \int z \, d\mu =$

$= \int u \, d\mu + i v \, d\mu + \int w \, d\mu + i \int z \, d\mu =$

$= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

Για το δεύτερο στη γενική περίπτωση, είναι

• Αν $\alpha \in \mathbb{R}$:
$\int (\alpha f) d\mu = \int \alpha u + i \int \alpha v = \alpha \int u + i \alpha \int v = \alpha \left(\int u + i \int v \right) =$

$\overset{\text{ειδ. περ.}}{=} \alpha \int f \, d\mu$

• Αν $\alpha = i$ τότε

$$\int i f \, d\mu = \int (-v + iu) \, d\mu = -\int v \, d\mu + i \int u \, d\mu =$$

$$= i \left[\int u \, d\mu + i \int v \, d\mu \right] = i \int f \, d\mu$$

- Αν $a = x + iy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ τότε από τα προηγούμενα

$$\int a f \, d\mu = \int x f + i y f \, d\mu = \int x f \, d\mu + \int i y f \, d\mu =$$

$$= x \cdot \int f \, d\mu + i y \int f \, d\mu = a \int f \, d\mu.$$

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ & $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

Απόδειξη

Από προηγούμενη πρόταση $g - f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

$f = f + g - g = g + (f - g)$

$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \underbrace{\int (f - g) \, d\mu}_{\geq 0} \geq \int f \, d\mu$

Πρόταση

Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ τότε $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$.

Απόδειξη

Έστω $a \in \mathbb{C}$: $|a| = 1$ με $a \int f \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right|$

$$\int a f \, d\mu = a \int f \, d\mu = \left| \int f \, d\mu \right| \in \mathbb{R}$$

Άρα, $\int a f \, d\mu = \int Re(a f) \, d\mu \leq \int |a| |f| \, d\mu = \int |f| \, d\mu$.

Όμως, $|Re(af)| \leq |af|$ και από την προηγούμενη πρόταση

Άρα, $\left| \int f \, d\mu \right| = a \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$.

Πρόταση

Έστωσαν $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ τότε αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού έπεται ότι $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ και επίσης αν $f = 0$ σ.π. τότε έπεται ότι $\int_A f \, d\mu = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$

Αποδ

Για τον 1ο ισχυρισμό:

Ας είναι $f=u+iv$ & $g=w+iz$ με $f=g$ μ-σπ

τότε $u=w$ μ-σπ & $v=z$ μ-σπ

Τότε $u^+=w^+$, $u^-=w^-$ μ-σπ και

$v^+=z^+$, $v^-=z^-$ μ-σπ

Αναγάγαμε το πρόβλημα σε μη αρνητικές συναρτήσεις και από κάποια προαναφερθείσα πρόταση:

$\int u^+ d\mu=\int w^+ d\mu$, $\int u^- d\mu=\int w^- d\mu$, $\int v^+ d\mu=\int z^+ \mu$, $\int v^- d\mu=\int z^- d\mu$

Άρα, $\int f d\mu=\left(\int u^+ d\mu-\int u^- d\mu\right)+i\left(\int v^+ d\mu-\int v^- d\mu\right)=\int g d\mu$

Για τον 2ο ισχυρισμό:

($\Rightarrow$) $f=0$ μ σ-π $\Rightarrow f\chi_A=0 \overset{1^o}{\Rightarrow} \int f\chi_A=\int 0\, d\mu=0=\int_A f d\mu$

για κάθε $A\in\mathcal{A}$

($\Leftarrow$) $\int_A f d\mu=0 \quad \forall A\in\mathcal{A}$

Ισοδύναμα $\int_A u d\mu+i\int_A v d\mu=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_A u d\mu=0$ & $\int_A v d\mu=0. \quad \forall A\in\mathcal{A}$

Για $A=[u\geq 0]\in\mathcal{A}$

$0=\int_A u d\mu=\int u\chi_A d\mu=\int \underset{\geq 0}{u^+} d\mu \overset{\text{Πρόταση}}{\Rightarrow} u^+=0$, μ-σπ

Για $A=[u\leq 0]\in\mathcal{A}$

$0=\int_A u d\mu=\int u\chi_A d\mu=-\int \underset{\geq 0}{u^-} d\mu \overset{\text{Πρόταση}}{\Rightarrow} u^-=0$, μ-σπ

Άρα, $u=u^+-u^-=0$, μ-σπ

Παρομοίως και για τη συνάρτηση v

Άρα $f=u+iv=0$ μ-σπ.

Νορμα στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ (εκτός ύλης)

$\mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}_+$

$f \longmapsto \int |f| \, d\mu$

Ειδικα στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ η συνάρτηση: $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $p \geq 1$ ειναι νόρμα

$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu$

- $\|f\|_1 \geq 0$
- $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
- $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1$

αλλα οχι νορμα αφου $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow |f| = 0$ σπ

ομως τωρα η συνάρτηση γινεται νορμα στο χωρο

$\mathcal{L}^1(\mu)/_{\sim} = L^1(\mu)$ οπου $\sim$ είναι η σχεδον παντου ισοτητα και είναι μια σχεση ισοδυναμίας

ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΥΡΙΑΡΧΗΜΕΝΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΟΥ LEBESGUE

Εστω $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ τ/ω $f = \lim_n f_n$

Υποθετουμε ότι υπάρχει μία πραγματική & ολοκληρώσιμη (ως προς μ) συναρτηση (δηλ $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$) τ/ω $|f_n| \leq g$

Τοτε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $\lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0$

και $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Απόδειξη

Εφόσον f_n μετρήσιμες $\Rightarrow \lim f_n = f$ μετρήσιμη

Επίσης, $|f_n| \leq g \Rightarrow \int |f_n| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty \Rightarrow f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\forall n$

Εφοσον, $|f_n| \leq g$ επεται ότι $|f| \leq g$

Άρα, $\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Εχουμε $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \Rightarrow 2g - |f_n - f| \geq 0 \Rightarrow h_n \geq 0$, $\forall n$

οπου $h_n := 2g - |f_n - f|$ θετικες & μετρήσιμες & $h_n \xrightarrow{\sigma\pi} g$

Από το λήμμα Fatou: $\int 2g \, d\mu = \int \lim h_n \, d\mu = \int \liminf h_n \, d\mu \leq$

$\leq \liminf \int h_n \, d\mu = \int 2g \, d\mu + \liminf \int -|f_n - f| \, d\mu =$

$= \int 2g \, d\mu - \limsup \int |f_n - f| \, d\mu$

Αναγκαστικα εφοσον $2g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \int 2g \, d\mu < +\infty$ θα πρεπει $\limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0$. Όμως, $|f_n - f| \geq 0 \Rightarrow \int |f_n - f| \, d\mu \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ετσι, $0 \leq \liminf \int |f_n - f| \, d\mu \leq \limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0$

Επομένως, $\limsup_n \int |f_n - f| = \liminf_n \int |f_n - f| = \lim_n \int |f_n - f| \, d\mu$

Επίσης,

$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \to 0$

Άρα, $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$